Υπενθ.(1) Έστω $A \in F^{\nu \times \nu}$ και $b \in F$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) b ιδιοτιμή του A

(ii) b ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x) \in F[x]$

(iii) $\det(A - bI_\nu) = 0$

(iv) Υπάρχει $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\nu \end{pmatrix} \in F^{\nu \times 1}$ με $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\nu \end{pmatrix} \neq O_{\nu \times 1}$ ώστε

$$A \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\nu \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\nu \end{pmatrix}$$

(v) $\dim V_A(b) \geq 1$ όπου $V_A(b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix} \in F^{\nu \times 1} : (A - bI_\nu) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix} = O_{\nu \times 1} \right\}$

✱ Το (iii) είναι ισοδύναμο με το (v) γιατί αν έχουμε πίνακα $\nu \times \nu$ το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει και ΜΗ τετριμμένες λύσεις $\Leftrightarrow$ ο πίνακας δεν αντιστρέφεται.

Υπενθ.(2) Ο $V_A(b)$ λέγεται ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $b \in F$

Παρατήρηση 1 Αφού $\deg \chi_A(x) = \nu$ (γιατί: $\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} a_{11}-x & & \\ a_{21} & a_{22}-x & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\nu}-x \end{bmatrix}$)

Ο πίνακας A έχει το πολύ ν διακεκριμένες ιδιοτιμές.
Κάθε τιμή μεταξύ 0 ιδιοτιμές και ν διακεκριμένες ιδιοτιμές μπορεί να συμβεί:

Π.χ. • αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} = x^2 + 1$$

• $B = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \nu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ τότε:

$$\chi_B(x) = \det \begin{bmatrix} 1-x & & & 0 \\ & 2-x & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nu-x \end{bmatrix} =$$

$$= (1-x)(2-x)(3-x)\cdot \ldots \cdot(\nu-x)$$

Επομένως ο B έχει ν διακεκριμένες ιδιοτιμές. $1, 2, 3 \ldots \nu$.

Ορισμός Έστω b ιδιοτιμή του A. Ονομάζουμε <u>αλγεβρική πολλαπλότητα</u> του b την πολλαπλότητα του b σαν ρίζα του $\chi_A(x)$

<u>Π.χ</u> $\chi_A(x) = (x-1)^2 (x-2)^3 . (x^2+5) \in \mathbb{R}[x]$
η ιδιοτιμή 1 του A έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και η ιδιοτιμή 2 του A έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 3

Ορισμός Έστω b ιδιοτιμή του A. Ονομάζουμε την διάσταση $\dim V_A(b)$ <u>γεωμετρική πολλαπλότητα</u>.

Ορισμός: Έστω $A \in F^{\nu \times \nu}$. Ο A λέγεται <u>διαγωνίσιμος</u> αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$ αναλύεται στο $F[x]$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων, και $\forall$ ιδιοτιμή b του A ισχύει:

$\boxed{\text{αλγεβρική πολλαπλότητα } b = \text{γεωμετρική πολλαπλότητα } b}$

<u>Πρόταση</u> Αν b ιδιοτιμή του A ισχύει

1 ≤ γεωμετρ. πολλαπλ. b ≤ αλγεβρική πολλαπλ. b.

Ασκήσεις #2

Άσκηση 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in R^{3\times 3}.$$

Βήμα 1ο: Υπολογισμός $\chi_A(x)$.
Βήμα 2ο: Υπολογισμός ριζών στο R του $\chi_A(x)$ (Υπολ. Ιδιοτιμών του A)
Βήμα 3ο: $\forall$ ιδιοτιμή b του A υπολογισμός του αντίστοιχου ιδιοχώρου $V_A(b)$.

Βήμα 1: $\chi_A(x) = \begin{bmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{bmatrix} \xrightarrow{*}$

$*$ Αφαιρώ την 3η στήλη από την 2η //

$$\begin{bmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ 2 & 1-x & 2 \\ 1 & x-1 & 2-x \end{bmatrix}$$

Βγάζω από 2η στήλη το $(x-1)$.

$$(x-1)\begin{bmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2-x \end{bmatrix}$$

Προσθέτω την 3η στήλη στην 2η

$$\begin{bmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4-x \\ 1 & 1 & 2-x \end{bmatrix}$$

Ορίζουσα ως προς $2^{ης}$ στήλη:

$$-(x-1)\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} = \dots$$

$$-(x-1)(x^2-6x+5) = -(x-1)^2\cdot(x-5).$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Ιδιοτιμές του A $\lambda_1=1$ με αλγεβρ. πολλαπλότητα 2
$\lambda_2=5$ " " 1

$\boxed{\text{ΒΗΜΑ 3}}$ $V_A(1)\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in R^{3\times1} : (A-1I_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

• Ομογενές σύστημα
3 εξισώσεων
3 αγνώστων.

$\boxed{\text{Βρίσκω Ιδιοχώρους}}$

• Μετά τις πράξεις βρίσκουμε:

$$V_A(1)=\left\{\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\-\xi_1\\-\xi_2\end{bmatrix} \xi_1,\xi_2\in R\right\} \text{ με βάση } \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

<u>ΑΡΑ</u> $\dim V_A(1)=2$ και άρα η ιδιοτιμή $\lambda_1=1$ έχει γεωμετρική πολλαπλότητα $=2$.

• $V_A(5)=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in R^{3\times1} : A-5\cdot I_3\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbb{O}_{3\times3}\right\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \xi_3 \\ 2\xi_3 \\ \xi_3 \end{bmatrix} . \ \xi_3 \in R \right\}$$

Άρα $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι βάση του ιδιόχωρου $V_A(5)$

συνεπώς $\dim V_A(5) = 1$.

▶ Γεωμετρική Πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 5$ είναι

1

Πολλαπλότητα	Αλγεβρική	Γεωμετρική
$\lambda_1 = 1$	2	2
$\lambda_2 = 5$	1	1.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΙΜΟΣ (ΝΑΙ):

① $X_A(x) = (x-1)^2 (x-5)$

② Γ.Π. = Α.Π $\left\{ \begin{matrix} \lambda_1 : (2 = 2) \\ \lambda_2 : (1 = 1) \end{matrix} \right\}$.

__Πρόταση!__ $A\in F^{\nu\times\nu}$. Ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος/F αν και μόνο αν ο A είναι όμοιος με διαγώνιο/F.

Δηλαδή A διαγωνιοποιήσιμος $\Leftrightarrow \exists D\in F^{\nu\times\nu}$ διαγώνιος $P\in F^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος ώστε

$$\boxed{P^{-1}AP=D}$$

__Π.χ.__ (1) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}^{2016}=\begin{bmatrix}3^{2016} & 0\\ 0 & 8^{2016}\end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix}3 & 5\\ 7 & 15\end{bmatrix}$

__Υποθέτουμε__ A διαγωνιοποιήσιμος: Τότε $\exists D$ διαγώνιος και αντιστρέψιμος P με

$$PAP^{-1}=D. \Rightarrow A=PDP^{-1}$$

$$A^2=(PDP^{-1})(PDP^{-1})=PD^2P^{-1}$$

__ΓΕΝΙΚΑ:__

$$\boxed{A^k=PD^kP^{-1}}$$

$\boxed{\text{Συμπέρασμα}}$: Αν ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος και μπορέσουμε να υπολογίσουμε τον διαγώνιο πίνακα D και τον αντίστροφο πίνακα D η ($A^k = PD^kP^{-1}$) μας δίνει έναν εύκολο τρόπο να υπολογίζουμε τις θετικές δυνάμεις του A.

Αλγόριθμος! Αν $A \in F^{\nu \times \nu}$ διαγωνίσιμος τότε υπολογίζεται

- P
- D

Έστω $A \in F^{\nu\times\nu}$. Υποθέτουμε A διαγωνίσιμος
Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ οι ιδιοτιμές του A με αλγεβρική πολλαπλότητα του λ_i ίση με $a_i \geq 1$.

Άρα A διαγωνίσιμος $\forall i$ η γεωμετρική πολλαπλότητα του λ_i είναι επίσης ίση με a_i δηλαδή

$$\boxed{\dim V_A(\lambda_i) = a_i}$$

Θέτουμε $D = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots \lambda_1}_{a_1\text{-φορές}}, \underbrace{\lambda_2 \dots \lambda_2}_{a_2\text{ φορές}}, \dots \underbrace{\lambda_k, \dots \lambda_k}_{a_k\text{-φορές}})$
$\in F^{\nu\times\nu}$ διαγώνιος.

Έστω $e_1, e_2, \dots e_{a_1}$ μια βάση του $V_A(\lambda_1) \subseteq F^{\nu\times 1}$
$e_{a_1+1}, e_{a_1+2}, \dots e_{a_1+a_2}$ $V_A(\lambda_2) \subseteq F^{\nu\times1}$

.

$e_{a_1+\dots+a_{k-1}+1}, e_{a_1+\dots+a_{k-1}+2}, \dots, e_{a_1+\dots+a_{k-1}+a_k}$ μια βάση του $V_A(\lambda_k)$

Τότε $P \in F^{\nu \times \nu}$ είναι ο πίνακας με i-στήλη ίση με e_i

Παράδ. $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, A διαγωνίσιμος
$\lambda_1 = 1$ ιδιοτιμή με αλγ. πολ/τητα 2
$\lambda_2 = 5$ ιδιοτιμή με αλγ. πολ/τητα 1.

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ e_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \text{Βάση του } V_A(\lambda_1)$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \to \text{Βάση του } V_A(\lambda_2).$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$P = [\,e_1 | e_2 | e_3\,] = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & g_1 \\ b_2 & c_2 & g_2 \\ b_3 & c_3 & g_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1} A P = D}$$